

Electromagnétisme de la matière
--

Partiel (durée 1h30)

I. Question de cours : (4pts)

1. Ecrire les quatre équations de Maxwell en notation complexe dans un milieu *l.h.i.* non magnétique de permittivité diélectrique relative $\underline{\epsilon}_r$.
2. Etablir l'équation d'onde du champ électrique en notation complexe pour une OPPM dans un milieu *l.h.i.* non magnétique de permittivité diélectrique relative $\underline{\epsilon}_r$.
3. En déduire la relation de dispersion reliant le vecteur d'onde complexe \underline{k} et la pulsation ω .
4. Ecrire la solution de l'équation d'onde en utilisant $\underline{k} = k' + ik''$. Etablir les relations entre ϵ'_r , ϵ''_r , l'indice de réfraction n et l'indice d'extinction K .

II. Cylindre diélectrique polarisé (6 pts)

Sous l'action d'un champ électrique appliqué E_a uniforme, un barreau cylindrique (rayon a , longueur $l \gg a$) acquiert une polarisation volumique P uniforme selon Ox , et ceci perpendiculairement à l'axe Oz du cylindre. On se propose de calculer le champ électrique E_{in} , à l'intérieur, et E_{ex} à l'extérieur du milieu, par la méthode du champ auxiliaire E^* .

1. Calculer E^* et en déduire les valeurs de E en fonction de P .
2. Le matériau est un conducteur. Exprimer P en fonction du champ appliqué. Quelle est la distribution de charge du conducteur ? Que vaut le moment dipolaire électrique du barreau ?
3. Déterminer les composantes de E à l'extérieur du barreau en fonction de E_a , a et des coordonnées cylindriques r et φ . Déduire les valeurs des composantes du déplacement électrique D en tout point.

III. Modèle de Drude : électron élastiquement lié en présence d'une onde électromagnétique plane. (5 pts)

On considère un électron, de masse m , de charge $-e$, lié élastiquement à une molécule du diélectrique de centre d'inertie O . On désigne par s son déplacement sous l'effet du champ électrique. L'électron est soumis à une force de rappel $-m(\omega_0)^2 s$, à une force de frottement proportionnelle à sa vitesse $-(m/\tau) ds/dt$ qui traduit l'effet de différentes causes d'amortissement de son mouvement, et à la force due à l'action du champ électromagnétique de l'onde plane. *Dans tout l'exercice, on confondra champ local et champ appliqué.* On suppose que la vitesse v de l'électron reste toujours petite devant celle de la lumière dans le vide c . On admet que la force exercée par le champ magnétique est négligeable devant celle exercée par le champ électrique.

1. Ecrire l'équation du mouvement de l'électron. Quelle est la signification physique de τ ?
2. Le champ macroscopique E de l'onde dans le milieu est sinusoïdal. Le milieu

comporte N électrons liés du même type par unité de volume et on confondra champ local et champ appliqué. Démontrer l'expression suivante de la polarisation \underline{P} en régime harmonique :

$$\underline{P} = \frac{Ne^2}{m} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) - i\omega/\tau} \underline{E}.$$

3. En déduire les expressions de la susceptibilité complexe χ et de la permittivité relative complexe ϵ_r du diélectrique, en fonction de $\omega_p = (Ne^2 / m\epsilon_0)^{1/2}$, ω , ω_0 , et τ . Quelle est la signification physique de ω_p ?
4. Dans le cas d'un amortissement fort, justifier par le calcul l'allure des graphes de $\epsilon'_r(\omega)$ et $\epsilon''_r(\omega)$ que vous représenterez. Définir la durée de Debye τ_D et indiquer en une phrase quelle est la réponse de la matière pour $\omega \ll (1/\tau_D)$ et $\omega \gg (1/\tau_D)$.

IV. Permittivité diélectrique d'un matériau l.h.i. (5pts)

A) Les données expérimentales concernant la partie réelle ϵ'_r de la permittivité diélectrique relative d'un matériau A, linéaire, homogène et isotrope (l.h.i.), sont :

- pour le domaine de pulsations $\{ 0 < \omega < 10^{12} \text{ rad/s} \}$: $\epsilon'_r = 16$.
- pour le domaine de pulsations $\{ 10^{13} < \omega < 10^{15} \text{ rad/s} \}$: $\epsilon'_r = 9$.

1. Donner l'allure du graphe de $\epsilon'_r(\omega)$ sur tout le spectre et indiquer l'origine physique la plus probable des mécanismes de polarisation de la matière mis en jeu dans ce diélectrique.

2. Donner la valeur numérique de l'indice de réfraction dans le domaine optique (lumière visible).

B) Les données expérimentales concernant la partie réelle ϵ'_r de la permittivité diélectrique relative d'un matériau B (l.h.i.), sont :

- pour le domaine de pulsations $\{ 0 < \omega < 10^7 \text{ rad/s} \}$: $\epsilon'_r = 25$.
- pour le domaine de pulsations $\{ 10^{10} < \omega < 10^{12} \text{ rad/s} \}$: $\epsilon'_r = 12$.
- pour le domaine de pulsations $\{ 10^{13} < \omega < 10^{15} \text{ rad/s} \}$: $\epsilon'_r = 7$.

3. A quel(s) mécanisme(s) microscopique(s) est due la polarisation du matériau B dans le domaine $\{ 0 < \omega < 10^7 \text{ rad/s} \}$? Donner l'allure du graphe de $\epsilon'_r(\omega)$ sur tout le spectre.

C) Capacité d'un condensateur en fonction de la fréquence.

4. Un condensateur plan est composé d'une couche de matériau A d'épaisseur $e = 1 \text{ mm}$, insérée entre deux armatures planes métalliques. Quelle est la capacité (en F/m^2) de ce condensateur à la fréquence $f = 1 \text{ MHz}$. On donne $\epsilon_0 = 1/(36\pi 10^9)$.

5. Un condensateur plan est composé d'une couche de matériau B d'épaisseur $e = 1 \text{ mm}$. Quelle est la capacité (en F/m^2) de ce condensateur à la fréquence $f = 10 \text{ MHz}$.